Cálculo 2 - Revisão de Funções de uma variável real e introdução a funções de duas variáveis)

1 Relembrando a definição de função

Uma *função* f de um conjunto A em um conjunto B é uma regra que associa a cada elemento $x \in A$ exatamente um elemento $f(x) \in B$. Escrevemos

$$f\colon A \to B, \qquad x \mapsto f(x).$$

No contexto que tratamos aqui, normalmente A e B são subconjuntos de $\mathbb{R}$. Dizemos que A é o *domínio* de f, e o conjunto

$$f(A) = \{f(x) \ : \ x \in A\}$$

é a *imagem* ou contradomínio efetivo de f.

Observações importantes

- A cada x do domínio corresponde um único valor $f(x)$.
- Dois diferentes valores de x podem ter a mesma imagem $f(x)$.
- Às vezes, o domínio não é todo $\mathbb{R}$: por exemplo, a função $f(x) = \sqrt{x}$ tem domínio $[0, \infty)$.

2 Exemplos de funções de uma variável real

2.1 Exemplo 1: Função linear

Considere $f(x) = 2x + 1$, definida para todo $x \in \mathbb{R}$.

1. Para $x = 0$ temos $f(0) = 2 \times 0 + 1 = 1$.
2. Para $x = 2$ temos $f(2) = 2 \times 2 + 1 = 5$.

2.2 Exemplo 2: Função quadrática

Considere $g(x) = x^2 - 4x + 3$.

1. Para $x = 1$ temos $g(1) = 1^2 - 4 \times 1 + 3 = 0$
2. Para $x = 3$ temos $g(3) = 9 - 12 + 3 = 0$.

3 Introdução a funções de duas variáveis

Uma função de duas variáveis é uma regra que atribui a cada par (x, y) um número real $f(x, y)$.

3.1 Exemplos

1. $f(x, y) = x + y$. Vamos calcular a função no ponto $(2, 3)$ (observe que, agora devemos informar um par ordenado de pontos).

   Temos que
   $$f(2, 3) = 2 + 3 = 5$$

2. $g(x, y) = x^2 + y^2$. Vamos calcular a função no ponto $(0, 1)$
   $$g(0, 1) = 0^2 + 1^2 = 1$$

3. $h(x, y) = \dfrac{1}{x - y}$, domínio $x \neq y$. Vamos calcular a função no ponto $(3, 5)$:
   $$h(3, 5) = \frac{1}{3 - 5} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

   Observe neste último exemplo que o domínio é formado pelo pontos (x, y) tais que $x \neq y$. Assim, não podemos calcular a função nos pontos onde a primeira coordenada é igual a segunda. (Justifique).

4 Exercícios resolvidos

Exercício 1. (Avaliação e domínio)
Considere $f(x) = \dfrac{3x - 2}{x + 1}$. Calcule $f(2)$ e diga o domínio de f.
Solução. Avaliando em $x = 2$:
$$f(2) = \frac{3 \cdot 2 - 2}{2 + 1} = \frac{6 - 2}{3} = \frac{4}{3}.$$
O domínio são todos x tais que o denominador não é zero, ou seja $x \neq -1$. Portanto $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Exercício 2. (Função de duas variáveis – avaliação)
Seja $F(x, y) = x^2 - xy + 3y$. Calcule $F(1, 2)$, $F(0, 0)$ e verifique se $(1, 2)$ pertence ao domínio.
Solução. A função é polinomial em x, y (sem divisões nem raízes), portanto o domínio é $\mathbb{R}^2$. Avaliando:
$$F(1, 2) = 1^2 - 1 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 1 - 2 + 6 = 5,$$
$$F(0, 0) = 0 - 0 + 0 = 0.$$
Logo $(1, 2)$ pertence ao domínio e $F(1, 2) = 5$.

5 Exercícios propostos

1. Para $h(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$, determine o domínio e calcule $h(1, 1)$.

2. Para $h(x, y) = x^2 - y^2$, determine o domínio e calcule $h(1, 1)$.

3. Para $h(x, y) = \dfrac{x - 2}{x - y}$, determine o domínio e calcule $h(0, 2)$.