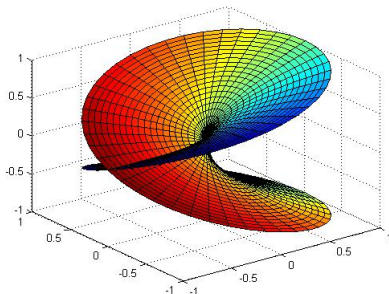


Cálculo Diferencial e Integral 2

C.S.Hida



Gradiente

Considere uma função de duas variáveis $f(x, y)$. O gradiente da função f no ponto (x_0, y_0) é o vetor (denotado por $\nabla f(x_0, y_0)$) e definido por

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$$

Gradiente

Exemplo: Considere $f(x, y) = x^2y^3 + 2x$. Determine $\nabla f(1, 1)$.

Exercício

Considere $f(x, y) = x^2 + y^2$. Determine $\nabla f(1, 1)$ e faça um esboço no plano cartesiano.

Exercício

Considere $f(x, y) = xy^2$. Determine o gradiente da função nos pontos $(1, 1)$ e $(2, 0)$.

Fato: O vetor Gradiente no ponto indica (aponta) a direção de maior crescimento para a função.

Exemplo

Suponha que um (2 dimensional) fluido corre com velocidade em módulo dada por $f(x, y) = x + y$, no tubo determinado por $x \geq 0$ e $0 \leq y \leq 4$. Determine o gradiente da função e analise o crescimento da função f .

Máximos e mínimos

Problema que queremos solucionar:

Considere uma chapa metálica que sofre a ação de uma temperatura dada por $T(x, y) = 100 - x^2 - 4x - 4 - y^2$. Para evitar problemas de deformação devido a temperatura, deseja-se criar um sistema de ventilação para a chapa, dada por um fluxo de ar. Determine o ponto da chapa onde esse fluxo deve ser apontado para um melhor resfriamento.

Exercício

Suponha que em uma dada chapa metálica, a pressão suportada em cada ponto da chapa é dada pela função $f(x, y) = x^2 + y^2$.

- 1 Determine os pontos da chapa que suportam 4 Pa de pressão.
- 2 Determine os pontos da chapa que suportam 9 Pa de pressão.
- 3 Calcule o gradiente da função no ponto $(2, 2)$ e desenhe no gráfico.

Problema

Determinar pontos de máximos e mínimos.

- ① **Ponto de maior escoamento de fluidos**
- ② **Melhor Ponto para apoios**
- ③ **Melhor combinação de ativos para compor uma carteira de investimentos**
- ④

Pontos críticos

Lembrando que a direção do gradiente fornece a direção de crescimento da função (e o oposto, indicando a direção de decrescimento), então temos

Pontos críticos

Lembrando que a direção do gradiente fornece a direção de crescimento da função (e o oposto, indicando a direção de decrescimento), então temos

Fato: Suponha que (x_0, y_0) é ponto de máximo/mínimo de uma função $f(x, y)$. Então $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$.

Pontos críticos

Lembrando que a direção do gradiente fornece a direção de crescimento da função (e o oposto, indicando a direção de decrescimento), então temos

Fato: Suponha que (x_0, y_0) é ponto de máximo/mínimo de uma função $f(x, y)$. Então $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$.

Os pontos onde $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$ são chamados de **pontos críticos**. Assim, um ponto de máximo/mínimo deve ser um ponto crítico.

Exemplo

Determine os pontos críticos da função $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Exercício

Determine os pontos críticos da função $f(x, y) = x^2 - x$.

Exemplo/Exercício

Determine os pontos críticos da função $f(x, y) = x + y$.

Como encontrar pontos de máximos/mínimos para uma dada função $f(x, y)$?

Observação - Formalidades

As definições e os fatos acima são definidas de forma local. Assim, máximos, mínimos, pontos críticos são definidos de forma local, no sentido de que deve existir uma vizinhança do ponto em questão tal que o ponto é de máximo/mínimo/crítico nessa vizinhança.

Exemplo: Encontrar o ponto de maior comércio varejista.

- 1 Macapá: Mercado central e Região

Observação - Formalidades

As definições e os fatos acima são definidas de forma local. Assim, máximos, mínimos, pontos críticos são definidos de forma local, no sentido de que deve existir uma vizinhança do ponto em questão tal que o ponto é de máximo/mínimo/crítico nessa vizinhança.

Exemplo: Encontrar o ponto de maior comércio varejista.

- 1 Macapá: Mercado central e Região (Máximo Local)
- 2 Brasil: Avenida Paulista (SP).

Observação - Formalidades

As definições e os fatos acima são definidas de forma local. Assim, máximos, mínimos, pontos críticos são definidos de forma local, no sentido de que deve existir uma vizinhança do ponto em questão tal que o ponto é de máximo/mínimo/crítico nessa vizinhança.

Exemplo: Encontrar o ponto de maior comércio varejista.

- 1 Macapá: Mercado central e Região (Máximo Local)
- 2 Brasil: Avenida Paulista (SP).
- 3 Mundo: Dubai Mall – Dubai

Observação - Formalidades

As definições e os fatos acima são definidas de forma local. Assim, máximos, mínimos, pontos críticos são definidos de forma local, no sentido de que deve existir uma vizinhança do ponto em questão tal que o ponto é de máximo/mínimo/crítico nessa vizinhança.

Exemplo: Encontrar o ponto de maior comércio varejista.

- 1 Macapá: Mercado central e Região (Máximo Local)
- 2 Brasil: Avenida Paulista (SP).
- 3 Mundo: Dubai Mall – Dubai (Máximo Global)

Teste da Segunda Derivada

Teorema

Seja $f(x, y)$ função de duas variáveis tal que $\nabla f(a, b) = (0, 0)$, ou seja, (a, b) é um ponto crítico de f .

Teste da Segunda Derivada

Teorema

Seja $f(x, y)$ função de duas variáveis tal que $\nabla f(a, b) = (0, 0)$, ou seja, (a, b) é um ponto crítico de f . Seja

$$H = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2 \text{ (Hessiana)}$$

Teste da Segunda Derivada

Teorema

Seja $f(x, y)$ função de duas variáveis tal que $\nabla f(a, b) = (0, 0)$, ou seja, (a, b) é um ponto crítico de f . Seja

$$H = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2 \text{ (Hessiana)}$$

❶ Se $H > 0$ e $f_{xx}(a, b) > 0$, então $f(a, b)$ é um mínimo local.

Teste da Segunda Derivada

Teorema

Seja $f(x, y)$ função de duas variáveis tal que $\nabla f(a, b) = (0, 0)$, ou seja, (a, b) é um ponto crítico de f . Seja

$$H = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2 \text{ (Hessiana)}$$

- 1 Se $H > 0$ e $f_{xx}(a, b) > 0$, então $f(a, b)$ é um mínimo local.
- 2 Se $H > 0$ e $f_{xx}(a, b) < 0$, então $f(a, b)$ é um máximo local.

Teste da Segunda Derivada

Teorema

Seja $f(x, y)$ função de duas variáveis tal que $\nabla f(a, b) = (0, 0)$, ou seja, (a, b) é um ponto crítico de f . Seja

$$H = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2 \text{ (Hessiana)}$$

- 1 Se $H > 0$ e $f_{xx}(a, b) > 0$, então $f(a, b)$ é um mínimo local.
- 2 Se $H > 0$ e $f_{xx}(a, b) < 0$, então $f(a, b)$ é um máximo local.
- 3 Se $H < 0$, então $f(a, b)$ não é nem mínimo nem máximo local.

Teste da Segunda Derivada

Teorema

Seja $f(x, y)$ função de duas variáveis tal que $\nabla f(a, b) = (0, 0)$, ou seja, (a, b) é um ponto crítico de f . Seja

$$H = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2 \text{ (Hessiana)}$$

- 1 Se $H > 0$ e $f_{xx}(a, b) > 0$, então $f(a, b)$ é um mínimo local.
- 2 Se $H > 0$ e $f_{xx}(a, b) < 0$, então $f(a, b)$ é um máximo local.
- 3 Se $H < 0$, então $f(a, b)$ não é nem mínimo nem máximo local.
- 4 Se $H = 0$, nada se pode afirmar.

Obs (formal): A função f deve ter derivadas de ordem 2 contínuas.

Exercício

Suponha que $(1, 1)$ é ponto crítico de uma função $f(x, y)$. Em cada caso, o que se pode dizer sobre f no ponto $(1, 1)$ se:

- 1 $f_{xx}(1, 1) = 4$, $f_{yy}(1, 1) = 1$ e $f_{xy}(1, 1) = 0$.
- 2 $f_{xx}(1, 1) = -3$, $f_{yy}(1, 1) = -2$ e $f_{xy}(1, 1) = 1$.
- 3 $f_{xx}(1, 1) = 1$, $f_{yy}(1, 1) = 4$ e $f_{xy}(1, 1) = 2$.

Exemplo

Considere $f(x, y) = 20 - x^2 - y^2$. Estude máximos mínimos.

Exercício

Considere $f(x, y) = 200 + x^2 + y^2$. Estude máximos mínimos.