

Cálculo 1

C. S. Hida

Limite de funções

Objetivo:

Estudar o comportamento de funções na **proximidade** de um ponto (mesmo se a função não está definida nesse ponto).

Exemplo

Considere a função

$$f(x) = \frac{x - 1}{x^2 - 1}$$

e o ponto $x_0 = 1$.

Exemplo

Considere a função

$$f(x) = \frac{x - 1}{x^2 - 1}$$

e o ponto $x_0 = 1$.

- 1 Faz sentido calcular a função para $x_0 = 1$?

Exemplo

Considere a função

$$f(x) = \frac{x - 1}{x^2 - 1}$$

e o ponto $x_0 = 1$.

- 1 Faz sentido calcular a função para $x_0 = 1$?
- 2 Como é o comportamento da função para valores próximos de $x = 1$?

Exemplo $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$ e ponto $x_0 = 1$

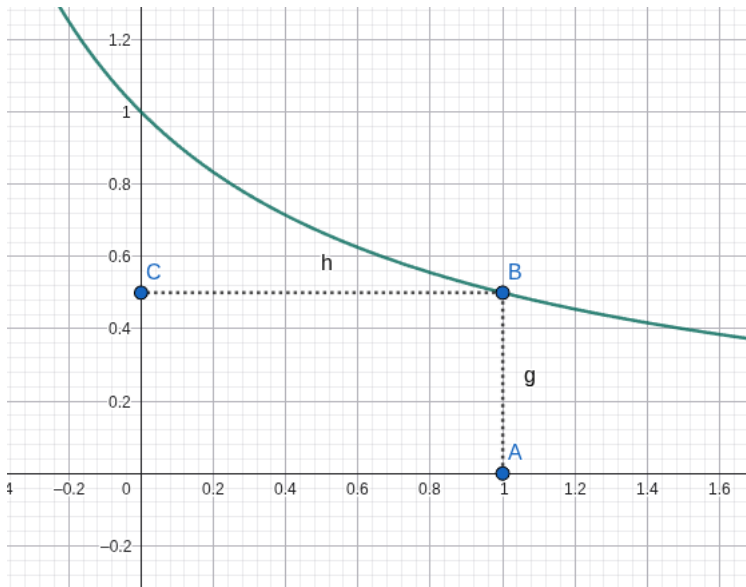
x	$f(x)$
0.0	1.000
0.1	0.909
0.2	0.833
0.3	0.769
0.4	0.714
0.5	0.667
0.6	0.625
0.7	0.588
0.8	0.556
0.9	0.526

x	$f(x)$
2.0	0.333
1.9	0.345
1.8	0.357
1.7	0.370
1.6	0.385
1.5	0.400
1.4	0.417
1.3	0.435
1.2	0.455
1.1	0.476

Limites

Dizemos que o limite de $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$ quando x tende a 1 é igual a 0.5

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} = 0.5$$



Limites

Intuitivamente, dizemos que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

se, os valores de $f(x)$ ficam **arbitrariamente próximos de** L , a medida que os valores de x ficam **próximos** de x_0 .

Limite laterais de funções

Intuitivamente: Dada uma função $f(x)$, dizemos que um número L é o **limite a direita** de $f(x)$ quando x tende a x_0 ,

Limite laterais de funções

Intuitivamente: Dada uma função $f(x)$, dizemos que um número L é o **limite a direita** de $f(x)$ quando x tende a x_0 , se, a medida que x se aproxima de x_0 pela direita

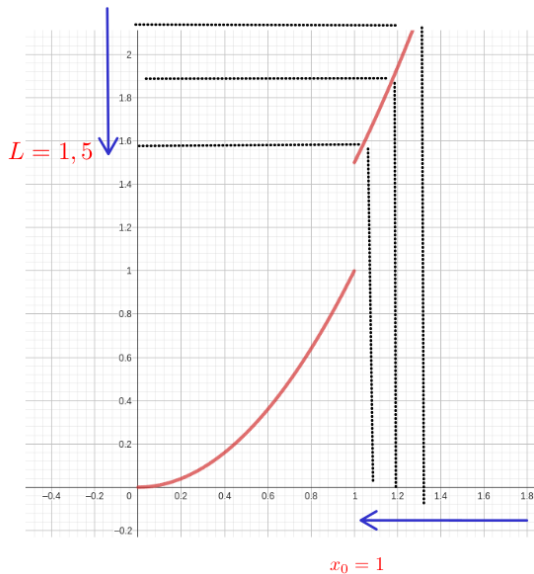
Limite laterais de funções

Intuitivamente: Dada uma função $f(x)$, dizemos que um número L é o **limite a direita** de $f(x)$ quando x tende a x_0 , se, a medida que x se aproxima de x_0 pela direita (ou seja, por valores maiores), os valores de $f(x)$ ficam cada vez mais próximos de L .

Limite laterais de funções

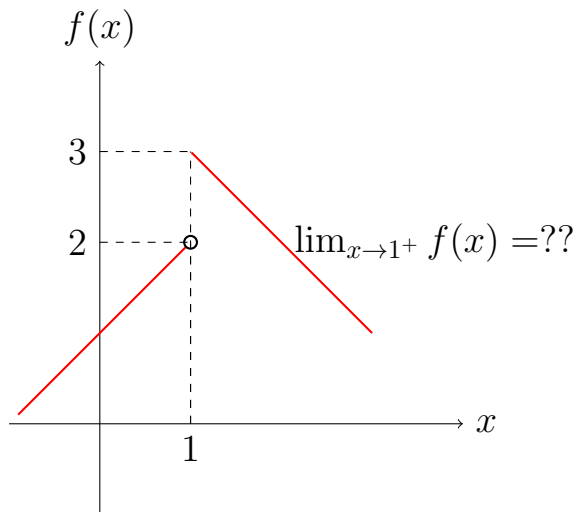
Intuitivamente: Dada uma função $f(x)$, dizemos que um número L é o **limite a direita** de $f(x)$ quando x tende a x_0 , se, a medida que x se aproxima de x_0 pela direita (ou seja, por valores maiores), os valores de $f(x)$ ficam cada vez mais próximos de L . Escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$$



Assim $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1.5$

Exercício



Limite laterais de funções

Intuitivamente: Dada uma função $f(x)$, dizemos que um número M é o **limite a esquerda** de $f(x)$ quando x tende a x_0 ,

Limite laterais de funções

Intuitivamente: Dada uma função $f(x)$, dizemos que um número M é o **limite a esquerda** de $f(x)$ quando x tende a x_0 , se, a medida que x se aproxima de x_0 pela esquerda

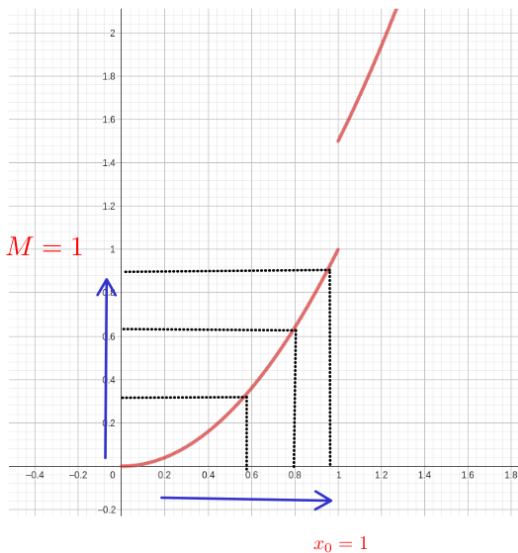
Limite laterais de funções

Intuitivamente: Dada uma função $f(x)$, dizemos que um número M é o **limite a esquerda** de $f(x)$ quando x tende a x_0 , se, a medida que x se aproxima de x_0 pela esquerda (ou seja, por valores menores), os valores de $f(x)$ ficam cada vez mais próximos de M .

Limite laterais de funções

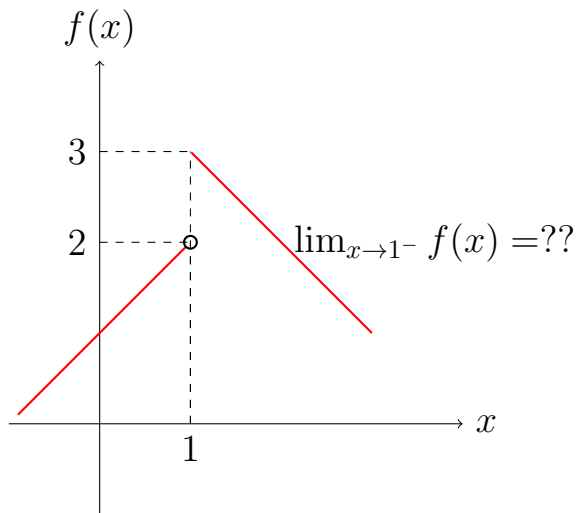
Intuitivamente: Dada uma função $f(x)$, dizemos que um número M é o **limite a esquerda** de $f(x)$ quando x tende a x_0 , se, a medida que x se aproxima de x_0 pela esquerda (ou seja, por valores menores), os valores de $f(x)$ ficam cada vez mais próximos de M . Escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = M$$



$$\text{Assim } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$$

Exercício



Limites laterais e Limite

Quando $M = L$, ou seja, os limites laterais são iguais,

Limites laterais e Limite

Quando $M = L$, ou seja, os limites laterais são iguais, dizemos que o **limite** da função $f(x)$, quando x tende a x_0 é L .

Limites laterais e Limite

Quando $M = L$, ou seja, os limites laterais são iguais, dizemos que o **limite** da função $f(x)$, quando x tende a x_0 é L .

Se $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$,

Limites laterais e Limite

Quando $M = L$, ou seja, os limites laterais são iguais, dizemos que o **limite** da função $f(x)$, quando x tende a x_0 é L .

Se $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$, , então o limite $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existe e

Limites laterais e Limite

Quando $M = L$, ou seja, os limites laterais são iguais, dizemos que o **limite** da função $f(x)$, quando x tende a x_0 é L .

Se $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$, , então o limite $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existe e

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

Limites laterais e Limite

Quando $M = L$, ou seja, os limites laterais são iguais, dizemos que o **limite** da função $f(x)$, quando x tende a x_0 é L .

Se $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$, , então o limite $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existe e

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

Se um dos limites laterais **não existe**,

Limites laterais e Limite

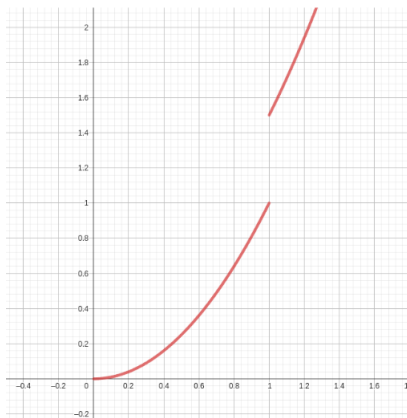
Quando $M = L$, ou seja, os limites laterais são iguais, dizemos que o **limite** da função $f(x)$, quando x tende a x_0 é L .

Se $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$, , então o limite $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existe e

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

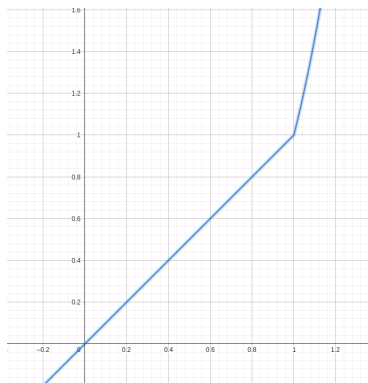
Se um dos limites laterais **não existe**, ou se são distintos, então dizemos que a função **não tem limite no ponto** x_0

Exemplo



$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = ??$$

Exercício



$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = ??$$

Exercício

Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \neq 3 \\ 7 & \text{se } x = 3 \end{cases}$$

Estude o limite $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$.

Exercício

Considere a função constante $f(x) = c$. Calcule $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Exercício

Considere a função constante $f(x) = x$. Calcule $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Propriedades Operatórias

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções, tal que existam $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$. Então existem os seguintes limites e vale as seguintes propriedades:

Propriedades Operatórias

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções, tal que existam $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$. Então existem os seguintes limites e vale as seguintes propriedades:

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (f \pm g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

Propriedades Operatórias

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções, tal que existam $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$. Então existem os seguintes limites e vale as seguintes propriedades:

- 1 $\lim_{x \rightarrow x_0} (f \pm g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
- 2 $\lim_{x \rightarrow x_0} (kf)(x) = k \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ para k uma constante qualquer.

Propriedades Operatórias

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções, tal que existam $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$. Então existem os seguintes limites e vale as seguintes propriedades:

- 1 $\lim_{x \rightarrow x_0} (f \pm g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
- 2 $\lim_{x \rightarrow x_0} (kf)(x) = k \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ para k uma constante qualquer.
- 3 $\lim_{x \rightarrow x_0} (f \times g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \times \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

Propriedades Operatórias

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções, tal que existam $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$. Então existem os seguintes limites e vale as seguintes propriedades:

- 1 $\lim_{x \rightarrow x_0} (f \pm g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
- 2 $\lim_{x \rightarrow x_0} (kf)(x) = k \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ para k uma constante qualquer.
- 3 $\lim_{x \rightarrow x_0} (f \times g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \times \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
- 4 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$, desde que $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$

Exercício

Suponha que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ e $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 4$

Exercício

Suponha que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ e $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 4$ Calcule

1 $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) + g(x)]$

2 $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) \times g(x)]$

3 $\lim_{x \rightarrow 1} 4f(x)$

4 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)}$

Exemplo

Considere $p(x) = x^2 + 3$.

Cuidado - Exemplo 2

Então.....para calcular limite basta calcular a função no ponto??

Cuidado - Exemplo 2

Então.....para calcular limite basta calcular a função no ponto??

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

Cuidado - Exemplo 2

Então.....para calcular limite basta calcular a função no ponto??

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = ??$$

Quais as situações possíveis

- 1 Posso calcular a função $f(x)$ no ponto x_0 e $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Quais as situações possíveis

- 1 Posso calcular a função $f(x)$ no ponto x_0 e $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. Exemplo: polinômios

Quais as situações possíveis

- 1 Posso calcular a função $f(x)$ no ponto x_0 e $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. Exemplo: polinômios
- 2 Posso calcular a função $f(x)$ no ponto x_0 , mas $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ pode nem existir.

Quais as situações possíveis

- 1 Posso calcular a função $f(x)$ no ponto x_0 e $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. Exemplo: polinômios
- 2 Posso calcular a função $f(x)$ no ponto x_0 , mas $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ pode nem existir.
- 3 Não posso calcular a função $f(x)$ no ponto x_0 , mas ainda assim, o limite $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ pode existir.