

## Introdução à Análise Real - 2026

### Lista 1

1. Considere

A: Princípio de indução e

B: Todo subconjunto não vazio de números naturais admite um elemento mínimo.

Prove que B implica A.

2. Prove por indução que  $n \neq s(n)$  para todo  $n$  natural.

3. Prove que, para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

4. Mostre que, para todo  $n \geq 1$ ,

$$2^n \geq n + 1.$$

5. Prove que, para todo  $n \geq 1$ ,

$$3^n > 2n + 1.$$

6. Mostre que, para todo  $n \geq 1$ ,

$$5^n - 1 \text{ é divisível por } 4.$$

7. Prove que, para todo  $n \geq 1$ ,

$$7^n - 1 \text{ é divisível por } 6.$$

8. Prove por indução que a soma  $S_n$  dos números de 1 até  $n$  é dada pela expressão

$$S_n = \frac{(n+1)n}{2}$$

Mais geralmente, prove que a soma geral dos  $n$  primeiros termos de uma progressão aritmética é:

$$S_n = \frac{(a_0 + a_n)n}{2}$$

9. Torre de Hanoi Considere o número mínimo  $T(n)$  de movimentos para mover  $n$  discos do pino A para o pino C. Então vale que

$$T(n) = 2^n - 1$$

Prove a formula por indução em  $n$ .

10. Descreva os seguintes conjuntos numéricos e qual a motivação você forneceria aos seus alunos (fundamental/médio) para a necessidade desses conjuntos.

(a) Conjuntos dos naturais.

- (b) Conjuntos dos Inteiros.  
 (c) Conjuntos dos Racionais.  
 (d) Conjunto dos Irracionais.
11. Prove que  $\sqrt{2}$  não é racional.
12. Forneça exemplos de números irracionais, diferente de  $\pi, e, \sqrt{n}$ .
13. Qual a definição de conjunto denso em  $\mathbb{R}$ ?
14. Verdadeiro ou falso (justifique):
- (a) O conjunto vazio é denso em  $\mathbb{R}$ .  
 (b) O conjuntos dos inteiros é denso em  $\mathbb{R}$ .  
 (c) O conjunto dos primos é denso em  $\mathbb{R}$ .  
 (d) O conjunto  $\{1, 2, \pi, 7\}$  pode fazer parte de um conjunto denso em  $\mathbb{R}$ .  
 (e) O conjunto dos números reais possui um único conjunto denso.  
 (f) Se  $A$  não é denso em  $\mathbb{R}$ , então seu complementar  $\mathbb{R} \setminus A$  é denso em  $\mathbb{R}$ .
15. O que é a propriedade Arquimediana dos números reais?
16. Um corpo ordenado é um corpo  $K$ , no qual se destacou um subconjunto  $P \subset K$ , chamado o conjunto dos elementos positivos de  $K$ , tal que as seguintes condições são satisfeitas:
- A soma e o produto de elementos positivos são positivos.
  - Dado  $x \in K$ , exatamente uma das três alternativas ocorre:  $x = 0$  ou  $x \in P$  ou  $-x \in P$ .
- (a) Na ordem usual de  $\mathbb{R}$ , quem seria o conjunto  $P$ ?  
 (b) Mostre que os números complexos  $\mathbb{C}$  não é um corpo ordenado.
17. Resolva a equação  $|x - 2| + |x - 7| = 5$  em  $\mathbb{R}$ .
18. O que é uma bola aberta centrada em um ponto  $a \in \mathbb{R}$  de raio  $\varepsilon > 0$  ?
19. O elemento 2 pertence a bola aberta centrada em 1 de raio 0.9?
20. Verifique se verdadeiro ou falso (justifique).
- (a) Não existe subconjunto de  $\mathbb{R}$  que é simultaneamente aberto e fechado.  
 (b) União arbitrária de conjuntos abertos é aberto.  
 (c) Intersecção arbitrária de conjuntos abertos é aberto.  
 (d) União arbitrária de conjuntos fechados é fechado.  
 (e) Intersecção arbitrária de conjuntos fechado é fechado.  
 (f)  $\mathbb{N}$  é aberto em  $\mathbb{R}$ .  
 (g)  $\mathbb{Q}$  é fechado em  $\mathbb{R}$ .
21. Mostre que todo aberto de  $\mathbb{R}$  é união de intervalos abertos.
22. Seja  $F \subset \mathbb{R}$  fechado e  $F \neq \mathbb{R}$ . Mostre que  $F$  não pode ser um conjunto denso de  $\mathbb{R}$ .
23. Na aula, definimos o que é o supremo de um conjunto. De forma simétrica, defina:

- (a) Cota inferior.
  - (b) Ínfimo.
24. Sejam  $A$  e  $B$  conjuntos limitados. Mostre que  $A \cup B$  e  $A \cap B$  também são limitados.
25. Forneça exemplos de:
- (a) Um conjunto que possui máximo.
  - (b) Um conjunto que possui mínimo.
  - (c) Um conjunto que não possui máximo, mas admite supremo.
  - (d) Um conjunto que não possui mínimo, mas admite ínfimo.
  - (e) Um conjunto que não admite ínfimo e nem supremo.
26. Mostre que se  $A \subset B$  e  $B$  é enumerável então  $A$  é finito ou enumerável.
27. Existem mais números racionais, ou irracionais?
28. Dado um conjunto  $X$ , denotamos por  $\wp(X)$  o conjunto das partes de  $X$ . Mostre que:
- (a) Sempre existe uma função injetora de  $X$  para  $\wp(X)$ .
  - (b) Nunca existe uma função sobrejetora de  $X$  sobre  $\wp(X)$ .
  - (c) Conclua que nunca existe bijeção de  $X$  em  $\wp(X)$ .
  - (d) Conclua que existem infinitos infinitos.