

Introdução à Análise Real – 2026

Lista 2

1. Escreva os primeiros 4 termos das seguintes seqüências:

(a) $x_n = n^2$

(b) $x_n = \frac{1}{n+1}$

(c) $x_n = 2$

(d) $x_n = (-1)^{n+1}$.

2. Defina o que é uma progressão aritmética. Forneça exemplos.

3. Defina o que é uma progressão geométrica. Forneça exemplos.

4. Forneça um exemplo de seqüência convergente e um exemplo de seqüência divergente. Justifique.

5. Considere a seqüência $(x_n)_n$ com termo geral dado por $x_n = \frac{1}{1+n}$. Prove que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

6. Seja (b_n) a seqüência dada por

$$b_n = \frac{n}{n+1}.$$

Mostre que (b_n) converge e determine seu limite.

7. Considere a seqüência

$$c_n = (-1)^n.$$

Mostre que (c_n) não converge.

8. Seja a seqüência definida por

$$d_n = \frac{n^2 + 1}{2n^2 - 3}.$$

Determine se (d_n) converge. Em caso afirmativo, calcule o limite.

9. Suponha que $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ e $(c_n)_n$ sejam seqüências tais que

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

para todo $n \geq 1$. Mostre que, se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$, então necessariamente $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$.

10. Suponha que $(x_n)_n$ seja uma seqüência convergente para $L > 0$. Mostre que apenas para um número finito de n temos $x_n \leq 0$.

11. Mostre que toda subsequência de uma seqüência convergente também converge para o mesmo limite.

12. É verdade que, se uma subsequência converge para um número L , então a sequência original também converge para o número L ? Justifique.
13. Seja $(x_n)_n$ uma sequência convergente. Prove que a sequência $(|x_n|)_n$ também converge.
14. Prove que toda sequência convergente é limitada.
15. Suponha que $(x_n)_n$ seja uma sequência limitada e que $(y_n)_n$ seja uma sequência que converge para zero. Mostre que a sequência $(x_n y_n)_n$ converge para zero.
16. Prove as propriedades operatórias das sequências.
17. Considere a série $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n$. Escreva os primeiros 4 elementos da sequência de somas parciais.
18. Considere a série harmônica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Mostre que é divergente.
19. Calcule a soma da série telescópica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right).$$

20. Seja uma progressão geométrica de primeiro termo a_1 e razão q .
 - (a) Deduza a expressão da soma dos n primeiros termos dessa série (ou seja, a soma parcial s_n da série $\sum_{i=1}^n a_i$).
 - (b) Deduza o valor da série $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ no caso em que $|q| < 1$.