Lista 2 - Cálculo 2

1. Calcule as derivadas parciais em relação a x e em relação a y das seguintes funções de duas variáveis:

   (a) $f(x,y) = x^2 + y^2$
   (b) $f(x,y) = x^2y + y^3$
   (c) $f(x,y) = e^x seny$
   (d) $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$
   (e) $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$
   (f) $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$
   (g) $f(x,y) = x^2e^y$
   (h) $f(x,y) = \cos(xy)$
   (i) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
   (j) $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$
   (k) $f(x,y) = \tan(x + y)$
   (l) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$
   (m) $f(x,y) = sen(x^2) + \cos(y^2)$
   (n) $f(x,y) = x^y$
   (o) $f(x,y) = \ln(x)\ \ln(y)$
   (p) $f(x,y) = x^2y^2$
   (q) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$
   (r) $f(x,y) = sen(x)\cos(y)$
   (s) $f(x,y) = ye^{xy}$

2. Calcule as derivadas parciais em relação a x e em relação a y das seguintes funções de duas variáveis (use a regra da cadeia para funções de uma variável):

   (a) $f(x,y) = e^{x^2} + yx$.
   (b) $f(x,y) = cos(x + 2y)$.

(c) $f(x,y) = e^{x^2y^2} + ln(xy)$.

3. A lei geral dos Gases é dada por $PV = nRT$. Mostre que

$$\frac{\partial P}{\partial V} \times \frac{\partial V}{\partial T} \times \frac{\partial T}{\partial P} = -1$$

O que é uma EDP?

Uma **equação diferencial parcial (EDP)** é uma equação matemática que envolve derivadas parciais de uma função desconhecida de duas ou mais variáveis. As EDPs aparecem em diversos contextos da Física, Química, Biologia e Engenharia, modelando fenômenos como difusão de calor, propagação de ondas e dinâmica de fluidos.

De forma geral, uma EDP relaciona derivadas parciais de uma função $u(x, y, \dots)$ com as próprias variáveis independentes. Exemplos clássicos são a equação do calor, a equação da onda e a equação de Laplace.

—

Exemplo Resolvido

Verifique se a função

$$u(x,y) = x - y$$

é solução da EDP

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Solução:

1. Calculamos a derivada parcial em relação a x:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1$$

2. Calculamos a derivada parcial em relação a y:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -1$$

3. Substituímos na EDP:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 1 + (-1) = 0$$

Portanto, $u(x,y) = x - y$ satisfaz a EDP de primeira ordem.

—

Exercício 1

Verifique que a função

$$u(x, y) = x\, e^y$$

é solução da EDP

$$\frac{\partial u}{\partial x} - u = 0.$$

—

Exercício 2

Verifique que a função

$$u(x, y) = y - \ln x$$

é solução da EDP

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$