Introdução à Análise Real – 2026

Lista 3

1. Escreva, com suas próprias palavras, o que é o limite de uma função e qual é a diferença entre calcular o limite de uma função e calcular o valor da função em um ponto. Contextualize com exemplos e contraexemplos

2. A definição de limite requer que o ponto em que o limite é considerado seja um ponto de acumulação. Qual é a necessidade por trás disso?

3. Escreva a definição formal de limite.

4. Usando a definição de limite, prove que:

   (a) $\lim_{x\to 3} 4 = 4$.

   (b) $\lim_{x\to 2} x = 2$.

   (c) $\lim x \to 1(2x - 5) = -3$.

5. Mostre que, o limite $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existe se, e somente se, os limites laterais $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ e $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ existem e são iguais.

6. Prove que, $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ se, e somente se, para toda sequência $(x_n)_n$ que converge para $x_0$, temos que $(f(x_n))_n$ converge para $L$.

7. Usando o resultado acima, prove que não existe o limite $\lim_{x\to 0} sen(\frac{1}{x})$.

8. Suponha que $\lim_{x\to x_0} f(x) = L > 0$. Então existe um $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - x_0| < \delta$, então $f(x) > 0$.

9. A afirmação a seguir é verdadeira ou falsa:

   'Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$, então existe um $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - x_0| < \delta$, então $f(x) = 0$.'

10. Enuncie e prove as propriedades operatórias de limite.

11. Prove que se $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existe, então $f$ é limitada em uma vizinhança de $x_0$, ou seja, existe $\delta > 0$ e $M > 0$ tal que $|f(x)| < M$ se $0 < |x - x_0| < \delta$.