Introdução à Análise Real – 2026

Lista 5

1. Seja
$$f(x) = 3$$
no intervalo $[0, 2]$.

Considere a partição
$$P = \left\{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\right\}.$$
Calcule:

(a) a soma inferior $s(f, P)$;

(b) a soma superior $S(f, P)$.

2. Seja
$$f(x) = x$$
em $[0, 1]$ e considere a partição
$$P = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}.$$
Determine:

(a) a soma inferior $s(f, P)$;

(b) a soma superior $S(f, P)$.

3. Seja
$$f(x) = x^2$$
em $[0, 2]$.

Considere a partição
$$P = \{0, 1, 2\}.$$
Calcule:

(a) a soma inferior $s(f, P)$;

(b) a soma superior $S(f, P)$.

4. Seja

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x < 1, \\ 2, & x \geq 1 \end{cases}$$

em $[0, 2]$.

Considere a partição

$$P = \left\{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\right\}.$$

Determine as somas inferior e superior.

5. Seja $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ uma partição de $[a, b]$.

Explique o significado geométrico:

   (a) da soma inferior;

   (b) da soma superior.

6. Seja

$$f(x) = |x|$$

em $[-1, 1]$.

Considere a partição

$$P = \{-1, 0, 1\}.$$

Calcule as somas inferior e superior.

7. Mostre que, se $P_1 \subseteq P_2$ são partições de $[a, b]$, então:

$$s(f, P_1) \leq s(f, P_2)$$

e

$$S(f, P_2) \leq S(f, P_1).$$

8. Seja f limitada em $[a, b]$.

Mostre que:

$$s(f, P) \leq S(f, P)$$

para toda partição P.

9. Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funções limitadas tais que

$$f(x) \leq g(x)$$

para todo $x \in [a, b]$.

Mostre que:

$$\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx.$$

10. Teorema Fundamental do Cálculo e Integração por Partes.

Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funções de classe C^1.

Considere a função

$$H(x) = f(x)g(x).$$

(a) Use a regra do produto para calcular $H'(x)$.

(b) Integre ambos os lados em $[a, b]$.

(c) Utilize o Teorema Fundamental do Cálculo para provar a fórmula de integração por partes:

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

11. Teorema Fundamental do Cálculo e Mudança de Variável

Sejam $f : I \to \mathbb{R}$ contínua e $\varphi : [a, b] \to I$ uma função de classe C^1.

Defina

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t)\,dt,$$

onde $x_0 \in I$ é fixo.

(a) Use o Teorema Fundamental do Cálculo para mostrar que

$$F'(x) = f(x).$$

(b) Considere a função composta

$$G(x) = F(\varphi(x)).$$

Use a regra da cadeia para calcular $G'(x)$.

(c) Integre ambos os lados em $[a, b]$ e conclua a fórmula de mudança de variável:

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,du.$$

11. Considere um círculo de raio r.

Explique como a ideia de polígonos inscritos e circunscritos pode ser usada para aproximar a área do círculo.

12. Um professor do ensino médio deseja introduzir a ideia de área do círculo utilizando retângulos cada vez menores.

Explique como a ideia intuitiva de exaustão pode ser apresentada aos alunos.